

Αναλυτική Γεωμετρία

04/04/19

Πχ

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$ παριστάνει σφαίρα κέντρου $K(-1, 2, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{3}$

Κανονική εξίσωση σφαίρας $\leadsto \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2} \quad (*)$

Η $(*)$ λείβανει την μορφή:

$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0} \quad (**)$ $\leadsto$ Αναλυτική εξίσωση σφαίρας.

Απόδειξη ότι κάθε σφαίρα έχει αναλυτική εξίσωση $(**)$

- Αντίστροφα

τι παριστάνει μια εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$??

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2x \frac{A}{2} + \left(\frac{A}{2} \right)^2 \right) + \left(y^2 + 2y \frac{B}{2} + \left(\frac{B}{2} \right)^2 \right) + \left(z^2 + 2z \frac{\Gamma}{2} + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 \right) + \Delta = \left(\frac{A}{2} \right)^2 + \left(\frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(x + \frac{A}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{B}{2} \right)^2 + \left(z + \frac{\Gamma}{2} \right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}{4}}$$

Συμπεράσματα:

Μια εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$.

παριστάνει

(I) Αν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 > 4\Delta$, σφαίρα κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right)$ και ακτίνα $R = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}{4}}$

(II) Αν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 = 4\Delta$, παριστάνει μόνο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right)$

(III) Αν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 < 4\Delta$ παριστάνει το $\emptyset$.

$E(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + Cz + D = 0$ $(*)$

με την προϋπόθεση ότι $(E, A, B, C) \neq (0, 0, 0, 0)$, παριστάνει
σφαίρα, επίπεδο, ή $\emptyset$ ή επίπεδο.

Δίνονται σημεία $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3, 4$, τα οποία δεν είναι
συμπεριπεδα

Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει μοναδική σφαίρα που διέρχεται από
τα P_i , $i=1, 2, 3, 4$.

Θεωρώ την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται από τα σημεία $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, \dots, 4$
και είναι της μορφής $(*)$

$$E = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

και αποδεικνύεται ότι
είναι ογκος η 3×3
~~οριζόντια~~ οριζόντια

$= - [\vec{P_1 P_2}, \vec{P_1 P_3}, \vec{P_1 P_4}] \neq 0$, γιατί το σημείο είναι μη
 $\hookrightarrow$ κενό γινόμενο συμπεριπεδα.

Άρα η (1) παριστάνει σφαίρα η οποία διέρχεται από τα σημεία
 $P_i, i=1, 2, 3, 4$

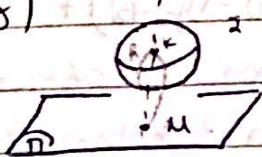
ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Δίνονται η σφαίρα (2) : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ και το επίπεδο (π) : $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$, $(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$

Περίπτωση I

$(\pi) \cap (2) = \emptyset$, δηλαδή δεν τέμνονται

$K(a, b, \gamma)$



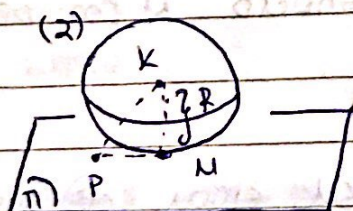
$$d(K, \pi) > R$$

Άρα $(\pi) \cap (2) = \emptyset \iff d(K, \pi) > R$

$$d(K, \pi) = \frac{|Aa + Bb + \Gamma\gamma + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Περίπτωση II

$$d(K, \pi) = R$$



$$P \neq M \implies d(P, K) > R$$

Ορισμός

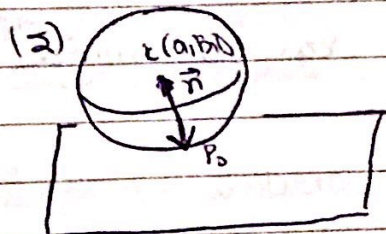
Αν $d(K, \pi) = R$, τότε η σφαίρα και το επίπεδο

$(\pi) \cap (2) = \{M\}$ και γι' αυτή την περίπτωση το επίπεδο (π) καλείται εφαπτομένο επίπεδο της σφαίρας (2) στο κέντρο του M

Προβλήματα

Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου (π) της σφαίρας (2) : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ στο κέντρο της $P_0(x_0, y_0, z_0)$

Λύση



Γνωρίζω ότι το διανύσμα $\vec{n} = \vec{KP}_0$ είναι
καθέτο στο (π) , $\vec{n} = (x_0 - a, y_0 - B, z_0 - \gamma)$

Η εξίσωση (π) είναι: ~~$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - B)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0$~~

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - B)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0$$

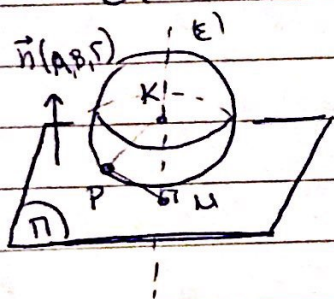
$$\Leftrightarrow (x_0 - a)((x - a) - (x_0 - a)) + (y_0 - B)((y - B) - (y_0 - B)) + (z_0 - \gamma)((z - \gamma) - (z_0 - \gamma)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - B)(y - B) + (z_0 - \gamma)(z - \gamma) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - B)^2 + (z_0 - \gamma)^2$$

Αρα: $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - B)(y - B) + (z_0 - \gamma)(z - \gamma) = R^2$

Περίπτωση III

$$d(K, (\pi)) < R$$



$$(2) : (x - a)^2 + (y - B)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$$

$$(\pi) : Ax + By + Cz + D = 0$$

Θεωρώ ευθεία $(\epsilon) \perp (\pi)$ στο σημείο M , η οποία
διέρχεται από το K

Εστω σημείο $P \in (2) \cap (\pi)$. Το τρίγωνο PKM είναι ορθογώνιο
στο M .

$$(d(P, M))^2 + (d(M, K))^2 = (d(P, K))^2 \quad \leadsto \text{Πυθαγόρειο Θεώρημα.}$$

$$\Leftrightarrow (d(P, M))^2 + (d(K, (\pi)))^2 = R^2 \Leftrightarrow (d(P, M))^2 = R^2 - (d(K, (\pi)))^2$$

$$d(P, M) = \sqrt{R^2 - (d(K, (\pi)))^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow d(P, M) = p \leadsto \text{σταθερή.}$$

Συμπέρασμα :

Αν $d(k, (\pi)) < R$, τότε η τομή $(\Sigma) \cap (\pi)$ είναι κύκλος, ο οποίος περιέχεται στο επίπεδο (π) έχει κέντρο την προβολή του κέντρου της (Σ) στο (π) και ακτίνα $R = \sqrt{R^2 - d(k, (\pi))^2}$

- Στην επιπεδομετρία ο κύκλος περιγράφεται από μια εξίσωση
- Στην στερεομετρία -||- από δυο εξισώσεις

Ένας κύκλος στον χώρο δίνεται ως το σύνολο λύσεων δύο εξισώσεων της μορφής :

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

- $p = R \Leftrightarrow$ όταν $d(k, (\pi)) = 0 \Leftrightarrow k \in (\pi)$

Σ' αυτή την περίπτωση το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο του κύκλου
Μέγιστος κύκλος

- $p < R \rightarrow$ ακτίνα φάρας
Λεπτός κύκλος

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ 2 ΣΦΑΙΡΩΝ

Δίνονται οι σφαίρες :

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 = R_1^2 \\ (2) \quad & (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-\gamma_2)^2 = R_2^2 \end{aligned}$$

Θεωρώ το σύστημα

$$\begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 = R_1^2 \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-\gamma_2)^2 = R_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

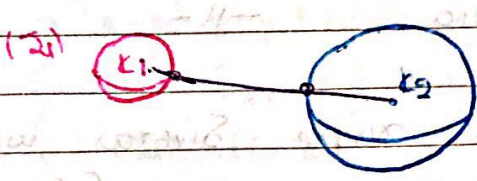
$$\begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-\gamma_1)^2 = R_1^2 \\ (x-a_1)^2 - (x-a_2)^2 + (y-b_1)^2 - (y-b_2)^2 + (z-\gamma_1)^2 - (z-\gamma_2)^2 = R_1^2 - R_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-\delta_1)^2 = R_1^2 \\ (a_2-a_1)(2x-a_1-a_2) + (b_2-b_1)(2y-b_1-b_2) + (\delta_2-\delta_1)(2z-\delta_1-\delta_2) = R_1^2 - R_2^2 \end{cases}$$

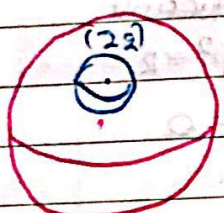
$$K_1(a_1, b_1, \delta_1) \neq K_2(a_2, b_2, \delta_2)$$

Τα ενδεχόμενα για την τομή των $(K_1), (K_2)$ είναι:

(I) $(K_1) \cap (K_2) = \emptyset$

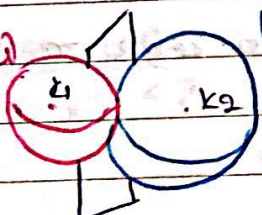


$$d(k_1, k_2) < |R_1 - R_2|$$



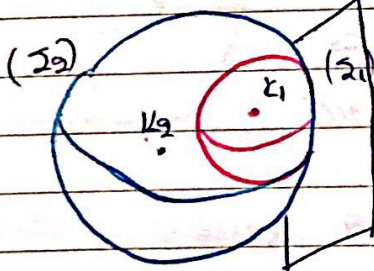
$$d(k_1, k_2) > R_1 + R_2$$

(II) $(K_1) \cap (K_2) \neq \emptyset$



Εφάπτονται εξωτερικά

$$d(k_1, k_2) = R_1 + R_2$$



Εφάπτονται εσωτερικά

$$d(k_1, k_2) = |R_1 - R_2|$$

Άσκηση

Τι περισταίνει η εξίσωση $(*) x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + 9 = 0$,

Λύση

$$(*) \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 + (z^2 + 6z + 9) = 1 \Leftrightarrow$$

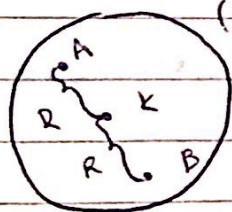
$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 1$$

Παριστάνει σφαίρα κέντρου $K(1, 0, -3)$ και ακτίνα $R=1$

Ακρόση

Δίνονται τα σημεία $A(5, 2, -1)$ και $B(-3, 4, 7)$. Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας με διάμετρο AB .

Λύση



(2)

Το κέντρο K της ζητούμενης σφαίρας είναι το μέσο του ευθ. τμήματος AB .

Σημάδι το σημείο $K(1, 3, 3)$

Η ακτίνα της (2) είναι

$$R = d(K, A) = \sqrt{()^2 + ()^2 + ()^2}$$

$$(2) : (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = R^2$$

Ακρόση

Ν.Σο οι εξισώσεις
$$\begin{cases} (1) x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

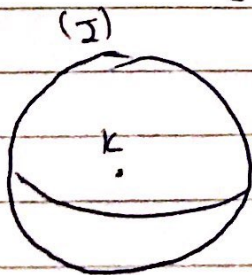
ορίσουν κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Λύση

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 20 + 1 + 1 + 1 \\ = 23 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 23$$

Αρα η (1) παριστάει σφαίρα (2) κέντρο $K(1, -1, 1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{23}$.

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 23 & (2) \\ z = 2 \Leftrightarrow z - 2 = 0 & (1) \end{cases}$$



$$d(k, m) = \frac{|0 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 0 \Rightarrow k \in (\pi)$$

Ορίσει μεγιστο κύκλο με κέντρο $k(3, -1, 2)$ κ' ακτίνα $\rho = R = \sqrt{34}$

Άσκηση

Σφαίρα (2) έχει κέντρο $k(3, 1, 5)$ και εφαπτεται του επιπέδου (π) : $2x + y + 2z = -3$

Να βρεθεί η εξίσωση της (2)

Λύση

Αφού η (2) εφαπτεται του (π), πρέπει $d(k, \pi) = R \Leftrightarrow$

$$R = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 10$$

$$(2) \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = R^2$$

Άσκηση

Δίνονται οι σφαίρες : (21) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 30$

$$(22) \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$$

Να βρεθεί η τομή τους.

Λύση

Η τομή (21) ∩ (22) είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 30 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 & (22) \\ 2x - 2z - 7 = 0 & (π) \end{cases}$$

$$(21) \cap (22) = (\pi) \cap (22)$$

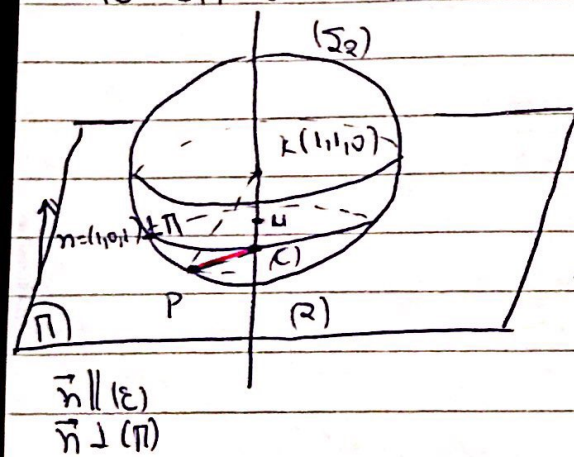
Η (22) έχει κέντρο $k(1, 1, 0)$ και ακτίνα $R=5$

Υπολογίζω την απόσταση του k από το (π) :

$$d(k, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

Παρατηρώ ότι $d(k, (\pi)) = \frac{5}{\sqrt{8}} < 5 = R$

$\Rightarrow O, (2, 1), (2, 2)$ τέμνονται σε κοινό κύκλο (C) . Θα βρω το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (C) . Πέρω ευθεία $(\epsilon) \perp (\pi)$ η οποία διέρχεται από το k και ~~ακού~~ τέμνει το (π) σε σημείο M το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου (C) .



$$(\epsilon): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-0}{-1}$$

$$\Leftrightarrow (\epsilon): \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}$$

Για να βρω το M λύνω το σύστημα

$$\begin{cases} x = t+1, y = 1, z = -t \\ 2x - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2 + 2t = 1 \\ \vdots \\ x = 9/4 \\ y = 1 \\ z = -5/4 \end{cases} \Leftrightarrow d = \frac{5}{4}$$

Αρα $M(\frac{9}{4}, 1, -\frac{5}{4})$ το κέντρο του (C)

Από ορθογώνιο τρίγωνο PKM , όπου $P \in (C)$ έχω

$$r = \sqrt{R^2 - d(k, (\pi))^2} = \dots$$